動的システム基礎　試験問題 -担当 井村-

2008 年 7 月 31 日

[1] 図 1 に示すように，鉛直平面内で運動するクレーンシステムの運動方程式をラグランジュの運動方程式を使って導出したい．このため，このシステムの運動エネルギー T，および位置エネルギー U を求めよ．ただし，リンクの質量と長さを m_0，l_0 とし，リンクの重心はリンクの長さの半分の位置にあるものとする．リンクの重心まわりの慣性モーメントを I_0，リンクの回転角 (図に示す) を θ_0，リンクの関節にあるアクチュエータのトルクを τ とする．一方，クレーンの先端Aには長さ l_1 のロープ（重さを無視）を介して質量 m_1 のおもりMが下がっているものとする．クレーン先端AとおもりMを結ぶ直線と鉛直方向との角度（図に示す）を θ_1 と記す．また，重力加速度の大きさを g とする．

[2] 図 2 の 2 タンクシステムを考える．このシステムの状態方程式は,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\tfrac{\beta_1}{\alpha_1}\sqrt{2gx_1} + \tfrac{1}{\alpha_1}u \\ \dot{x}_2 &= -\tfrac{\beta_2}{\alpha_2}\sqrt{2gx_2} + \tfrac{\beta_1}{\alpha_2}\sqrt{2gx_1} \\ y &= \beta_2\sqrt{2gx_2} \end{aligned}$$

で与えられる．ただし，x_i はタンク i の液位, u はタンク 1 への流入流量, y はタンク 2 からの流出流量, α_i,β_i はタンク i の適当な定数, g は重力加速度の大きさを表す．また状態ベクトルを $x = [x_1\ x_2]^T$ とする．このとき，このシステムに対して以下の問いに答えよ．
(1) このシステムの平衡点 (x_e, u_e, y_e) の満たすべき条件を求めよ．ただし，$x_e = [x_{1e}\ x_{2e}]^T$ とする．
(2) 平衡点 (x_e, u_e, y_e) のまわりで近似線形化した状態方程式を求めよ．ただし，$\tilde{x} = [\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2]^T = x - x_e$, $\tilde{u} = u - u_e$, $\tilde{y} = y - y_e$ とする．
(3) (2) の状態方程式より $\tilde{u}$ から $\tilde{y}$ への伝達関数を求めよ．

[3] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{ds - 2}{as^2 + bs + c}$$

であるシステム $y = G(s)u$ を考える．つぎの問いに答えよ．
(1) $a = 0$, $d = 0$ とし，1 次遅れ系を考える．このシステムの時定数と定常ゲインを求めよ．またこれらの用語の意味を単位ステップ応答の概略図を用いて簡単に説明せよ．
(2) $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 3$ のとき極と零点をもとめよ．このときのシステムの単位ステップ応答を求めよ．
(3) $a > 0$, $d = 0$ とする．このシステムに単位ステップ入力を加えると，非振動で，ある値に収束した．このための条件を a,b,c を用いて示せ．

[4] 図 3 のフィードバック系のブロック線図に対して，つぎの問いに答えよ．ただし各伝達関数を次式とする．

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 2}, \quad C(s) = \frac{a}{s + 2}$$

(1) r から y までの伝達関数を $G(s)$ とおく．この $G(s)$ を求めよ．
(2) r から y までの伝達関数 $G(s)$ が安定であるための a の条件をフルビッツの安定判別法により求めよ．

(3) 各システム $y = P(s)u$, $u = C(s)e$ に対する状態方程式を，それぞれ状態ベクトル x_p, x_c を適当に設定して導出せよ．また，この２つのサブシステムを $e = r - y$ で繋いだフォードバック系の状態方程式を入力を r, 出力を y，状態ベクトル $x = [x_p^T\ x_c^T]^T$ と設定して導出せよ．

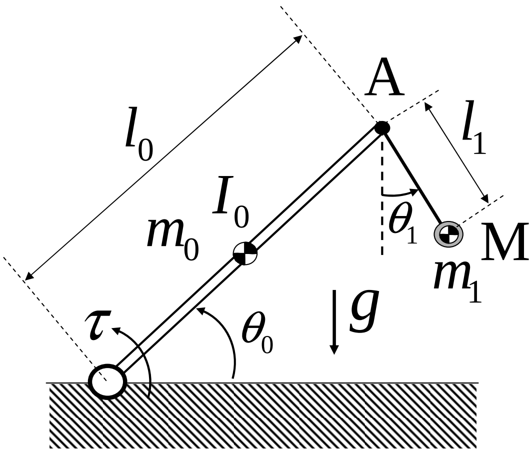

図１：　クレーンシステム

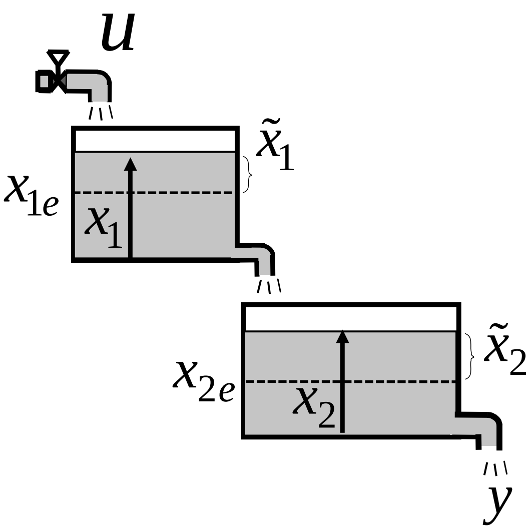

図２：　２タンク系

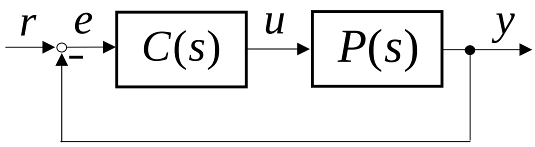

図３: ブロック線図

動的システム基礎　試験問題　略解　担当　井村

2008 年 7 月 31 日分
（受験者 50 名，最高点 99 点，平均点 80.84 点）

[1] （配点 15 点）
リンクの運動エネルギー T_0，位置エネルギー U_0 は

$$T_0 = \frac{1}{2}\{m_0 \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + I_0\}\dot{\theta}_0^2$$

$$U_0 = m_0 g \left(\frac{l_1}{2}\right) \sin\theta_0$$

である．振り子の方の運動エネルギー T_1，位置エネルギー U_1 は

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$U_1 = m_1 g (l_0 \sin\theta_0 - l_1 \cos\theta_1)$$

である．ただし，$\dot{x}, \dot{y}$ は

$$x = l_0 \sin\theta_0 - l_1 \cos\theta_1, \quad y = l_0 \cos\theta_0 + l_1 \sin\theta_1$$

の時間微分で与えられる．全系の運動エネルギーは $T = T_0 + T_1$, 位置エネルギーは $U = U_0 + U_1$ である．

[2]（配点 27 点)

(1) $\dot{x} = f(x, u)$ と表現すると，$f(x_e, u_e) = 0$ より得られる．

(2) $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}, \tilde{y} = C\tilde{x}$，ここで

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1\sqrt{g}}{\alpha_1\sqrt{2x_{1e}}} & 0 \\ \frac{\beta_1\sqrt{g}}{\alpha_2\sqrt{2x_{1e}}} & -\frac{\beta_2\sqrt{g}}{\alpha_2\sqrt{2x_{2e}}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_2\sqrt{g}}{\sqrt{2x_{2e}}} \end{bmatrix}$$

(3) 伝達関数を $G(s)$ とおくと，$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ より得られる．

[3] (配点 30 点)

(1) 時定数 b/c, ゲイン $-2/c$．図と説明は省略.
(2) 零点 2/3, 極　-2,-1 ステップ応答：$5e^{-t} - 4e^{-2t} - 1$
(3) 収束→安定：$b, c > 0$, 非振動：$b > 2\sqrt{ac}$

[4] (配点 28 点)

(1) $G(s) = PC/(1 + PC)$
(2) フルビッツ行列より，$4 < a < 12$.
(3) フィードバック系の状態方程式は下記のとおり．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -a & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} r, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$